

# Στη Ζυγαριά – Ζυγαριά Ισορροπίας

## Υλικά

Ταμπλό εκθέματος, 11 βάρη διαφορετικής μάζας, 1 πλαστικό βαρίδιο, ρωμαϊκή ζυγαριά με τη δυνατότητα διαβάθμισης

## Σύντομη Περιγραφή

Αυτή η δραστηριότητα έχει σκοπό να διεγείρει τόσο τη λογική σκέψη όσο και την κατανόηση των αναλογιών. Μπορεί να οδηγήσει σε ασκήσεις λογικού συλλογισμού και άλγεβρας. Το έκθεμα δίνει στον συμμετέχοντα την ευκαιρία να σκεφτεί και να αλληλεπιδράσει με μια ζυγαριά. Δύο προβλήματα τίθενται για να προβληματίσουν και να προκαλέσουν τους συμμετέχοντες. Οι πλάκες της ζυγαριάς μπορούν να διαβαθμιστούν αναλόγως. Αυτό επιτρέπει την δημιουργία προβλημάτων που μπορούν να υλοποιηθούν είτε προσθέτοντας είτε αφαιρώντας βαρίδια από την ζυγαριά είτε με την άμεση σύγκριση δύο ποσοτήτων στις πλάκες.

## Συναρμολόγηση

### Σχεδιασμός όλων των κομματιών


Το κεντρικό κομμάτι του εκθέματος είναι μια ζυγαριά με διαβαθμισμένη πλάκα. Το ταμπλό του εκθέματος παρέχει δύο προκλήσεις οι οποίες πρέπει να επιλυθούν καταφεύγοντας στη ζυγαριά ή στη λογική.

Αυτό συνοδεύεται από ρυθμιζόμενα βάρη. Για το πρώτο πρόβλημα θα πρέπει να υπάρχει ένα βάρος με μικρότερη μάζα. Υπάρχουν βάρη με διαφορετική μάζα τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν μεμονωμένα ή να συναρμολογηθούν για να κρεμαστούν μαζί στη δοκό.


## Συναρμολόγηση

Μαζί με το σύνολο των προβλημάτων, οι ζυγαριές και τα βάρη θα πρέπει να τοποθετούνται εύκολα και ανοιχτά σε ένα τραπέζι. Το τρισδιάστατο μοντέλο μπορεί να εκτυπωθεί και να συναρμολογηθεί, για οδηγίες και άλλες ιδέες υλοποίησης ανατρέξτε στο έγγραφο για το DIY.

### Το Ταμπλό (DINA3)




#### Στη Ζυγαριά



Η ζυγαριά συγκρίνει τη μάζα δύο αντικειμένων. Όταν οι πλάκες βρίσκονται σε ισορροπία, τα αντικείμενα που τοποθετούνται σε αυτές έχουν την ίδια μάζα- αν η μία πλάκα χαμηλώσει, το αντικείμενο που τοποθετείται σε αυτή την πλευρά έχει μεγαλύτερη μάζα.

Ο Αρχιμήδης, ο μεγάλος μαθηματικός της αρχαίας Ελλάδας, φέρεται να είπε: «Δωσ μου μέρος να σταθώ (υπομόχλιο) κι ως και τη γη μπορώ να κινήσω!»

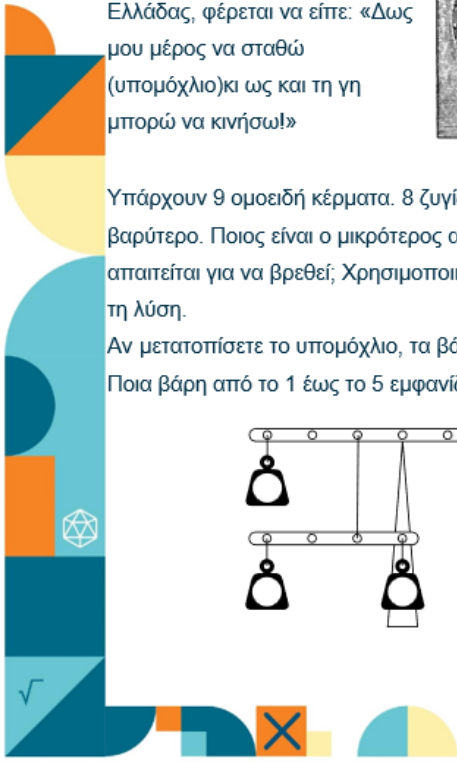



*Mechanic's Magazine, 1824*

Υπάρχουν 9 ομοειδή κέρματα. 8 ζυγίζουν το ίδιο. Το ένα είναι βαρύτερο. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός ζυγίσματος που απαιτείται για να βρεθεί; Χρησιμοποιήστε τη ζυγαριά για να βρείτε τη λύση.

Αν μετατοπίσετε το υπομόχλιο, τα βάρη συσχετίζονται αναλογικά. Ποια βάρη από το 1 έως το 5 εμφανίζονται παρακάτω;



Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

## Άλλες Επιλογές

Εκτός από τα προτεινόμενα προβλήματα που αναφέρονται στο ταμπλό του εκθέματος, μπορούν να αναφερθούν και διάφορα άλλα. Μπορεί να διερευνηθούν οι ιδιότητες των ισορροπιών, «Τι πρέπει να συμβεί για να ισορροπήσει η ρωμαϊκή ζυγαριά;», «Αν αυτό το αντικείμενο ζυγίζει 10 γραμμάρια, πόσο ζυγίζουν άλλα αντικείμενα συγκρίνοντάς τα;».

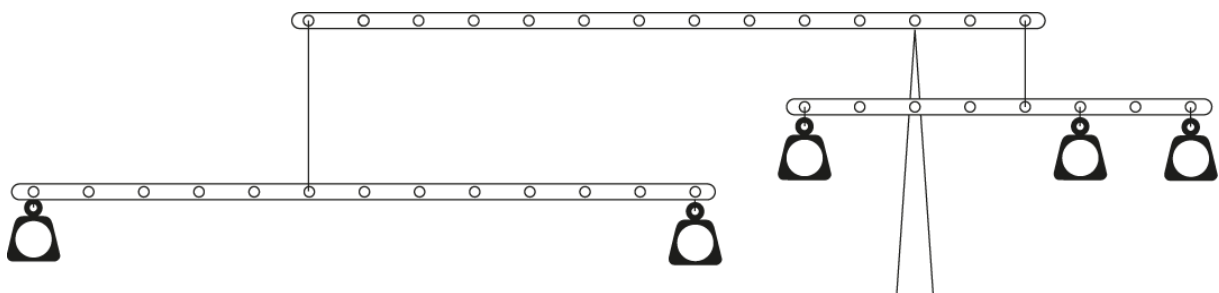
Παρακάτω παραθέτουμε δύο επιπλέον προβλήματα που μπορούν να προταθούν από έναν εκπαιδευτή ή σε ένα μαθησιακό περιβάλλον.

### Συγκριτικά Προβλήματα Ζύγισης

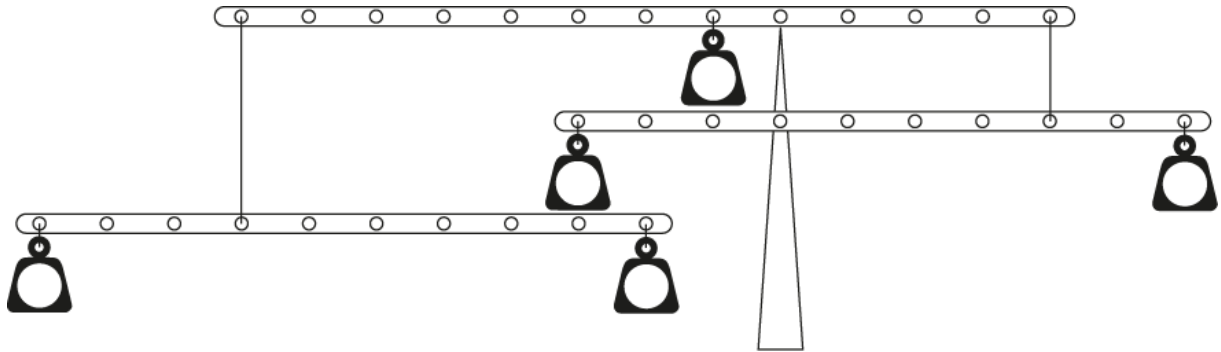
1. «Δίνονται 5 κέρματα από τα οποία το ένα είναι ελαφρύτερο. Στη χειρότερη περίπτωση, ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσματος που απαιτείται για να βρούμε το ψεύτικο κέρμα;»
2. «Αυτή τη φορά μας δίνονται 3 κέρματα. Εάν το ένα κέρμα είναι διαφορετικό, αλλά δεν γνωρίζουμε αν είναι βαρύτερο ή ελαφρύτερο από τα άλλα. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός ζυγίσματος που απαιτείται για να διαπιστωθεί αν υπάρχει ψεύτικο κέρμα και ποιο είναι αυτό;»

### Προβλήματα Ισορροπίας Δοκού

3. Χρησιμοποιώντας τα βάρη με τιμές μεταξύ 1-28 βρείτε μια λύση για την ακόλουθη ισορροπία:



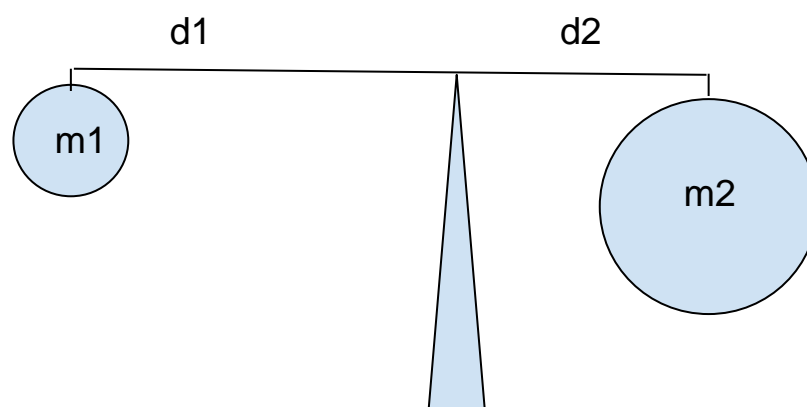
4. Χρησιμοποιώντας τα βάρη με τιμές μεταξύ 1-20 βρείτε μια λύση για την ακόλουθη ισορροπία:



## Επεξήγηση

Ο μοχλοβραχίονας είναι μια δοκός που συνδέεται με το έδαφος μέσω ενός μεντεσέ ή ενός άξονα περιστροφής, που ονομάζεται υπομόχλιο. Ο μοχλοβραχίονας είναι μια κινητή ράβδος που περιστρέφεται πάνω σε ένα υπομόχλιο συνδεδεμένο σε ένα σταθερό σημείο. Ο μοχλοβραχίονας λειτουργεί με την εφαρμογή δυνάμεων σε διαφορετικές αποστάσεις από το σημείο στήριξης ή τον άξονα περιστροφής.

Καθώς ο μοχλοβραχίονας περιστρέφεται γύρω από το υπομόχλιο, τα σημεία που βρίσκονται πιο μακριά από αυτόν τον άξονα κινούνται ταχύτερα από τα σημεία που βρίσκονται πιο κοντά στον άξονα. Επομένως, μια δύναμη που ασκείται σε ένα σημείο που βρίσκεται πιο μακριά από τον άξονα πρέπει να είναι μικρότερη από τη δύναμη που βρίσκεται σε ένα σημείο που βρίσκεται πλησιέστερα, καθώς η ισχύς προκύπτει από το γινόμενο της δύναμης και της ταχύτητας. Αυτό είναι γνωστό ως ο νόμος του μοχλού (βλ. παρακάτω εικόνα).



Αυτή η αναλογικότητα επιτρέπει πολλαπλές συγκρίσεις μεταξύ πλακών που απέχουν εξίσου και στις οποίες έχουν τοποθετηθεί διαφορετικά βάρη, ή βάρη που έχουν τοποθετηθεί πιο κοντά ή πιο μακριά από τον μοχλοβραχίονα (το βάρος της δοκού δεν λαμβάνεται υπόψη εδώ).

Κατά τη σύγκριση των βαρών, οι πόροι στα δέντρα αποφάσεων διευκολύνουν την οπτικοποίηση και την επίλυση των προβλημάτων. Στα Προβλήματα Ισορροπίας των

δοκών μπορούμε να καταφύγουμε στη χρήση αλγεβρικής διατύπωσης για να διευκολυνθούν οι υπολογισμοί που είναι απαραίτητοι για την εύρεση λύσης.

Λύσεις στα προβλήματα του ταμπλό του εκθέματος:

### **Λύση στο πρόβλημα της συγκριτικής ζύγισης από το ταμπλό του εκθέματος:**

Ο ελάχιστος αριθμός σταθμίσεων είναι 2. Τα κέρματα είναι ομαδοποιημένα σε τριάδες. Όταν ζυγίζονται δύο από αυτές τις ομάδες υπάρχουν δύο επιλογές: είτε ισορροπούν είτε μία από αυτές είναι βαρύτερη. Αν ισορροπούν, αυτό σημαίνει ότι το βαρύτερο κέρμα πρέπει να βρίσκεται στην άλλη ομάδα.

Η επόμενη ζύγιση θα πρέπει να συγκρίνει δύο κέρματα από αυτή την ομάδα. Εάν το ένα είναι βαρύτερο, η επόμενη ζύγιση θα πρέπει να λάβει δύο κέρματα από την ομάδα με το μεγαλύτερο βάρος. Σε κάθε περίπτωση συγκρίνονται δύο κέρματα από μια ομάδα. Είτε η επόμενη ζύγιση αποκαλύπτει το βαρύτερο κέρμα είτε, εάν το αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο, το κέρμα που έμεινε έξω από την ομάδα πρέπει να είναι αυτό που απέμεινε εκτός.

### **Λύση του προβλήματος ισορροπίας της δοκού από το ταμπλό του εκθέματος:**

Η ισορροπία που περιγράφεται από την εικόνα μπορεί να τεθεί ως δύο ισότητες, αναθέτοντας γράμματα στα βάρη:

$A = 2B$  (1) και  $3\Gamma + 1(A + B) = 2\Delta + 5E$  (2), όπου A, B, Γ, Δ, E πρέπει να είναι ακέραιες από το 1 μέχρι το 5. Οι λύσεις για το (1) είναι είτε (2, 1) ή (4, 2). Αν επιλέξουμε την πρώτη λύση, η αριστερή πλευρά της (2) θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Χρησιμοποιώντας το υπόλοιπο του αριθμού είναι αδύνατο να ικανοποιηθεί αυτή η συνθήκη. Συνεπώς, γνωρίζουμε ότι  $A=4$  και  $B=2$ . Η αριστερή πλευρά εξακολουθεί να είναι πολλαπλάσιο του 3, αλλά οι διαθέσιμοι αριθμοί είναι αρκετοί για να το ικανοποιήσουν έχοντας  $\Delta = 5$  και  $E = 1$  έχουμε  $2 * 5 + 1 * 5 = 3 * 5 = 15$  και από την άλλη πλευρά μόνο το  $\Gamma = 3$  είναι μια επιλογή με αποτέλεσμα  $3 * 3 + 2 + 4 = 15$ . Επίλυση του προβλήματος.  $(A, B, \Gamma, \Delta, E) = (4, 2, 3, 5, 1)$ .

### Επιπρόσθετες Λύσεις των Προβλημάτων:

1. Είναι μια απλούστερη εκδοχή του ταμπλό του εκθέματος, η σωστή απάντηση είναι 2 ζυγίσεις για να εξασφαλιστεί η εύρεση του κέρματος, με το ίδιο επιχείρημα.
2. Η σωστή απάντηση είναι 2 ζυγίσεις για να εξασφαλιστεί η εύρεση του κέρματος, με το ίδιο επιχείρημα. Παρόλο που υπάρχουν λιγότερα κέρματα, μη γνωρίζοντας αν το κέρμα είναι βαρύτερο ή όχι, απαιτείται η σύγκριση δύο διαφορετικών ζευγών κερμάτων.
3. Από αριστερά προς τα δεξιά, τα βάρη πρέπει να τοποθετηθούν με αλφαβητική σειρά. Η λύση είναι:  
 $(A, B, \Gamma, \Delta, E) = (7, 5, 24, 15, 27)$
4. Η λύση είναι  $(A, B, \Gamma, \Delta, E) = (3, 4, 5, 8, 12)$

## Δεξιότητες

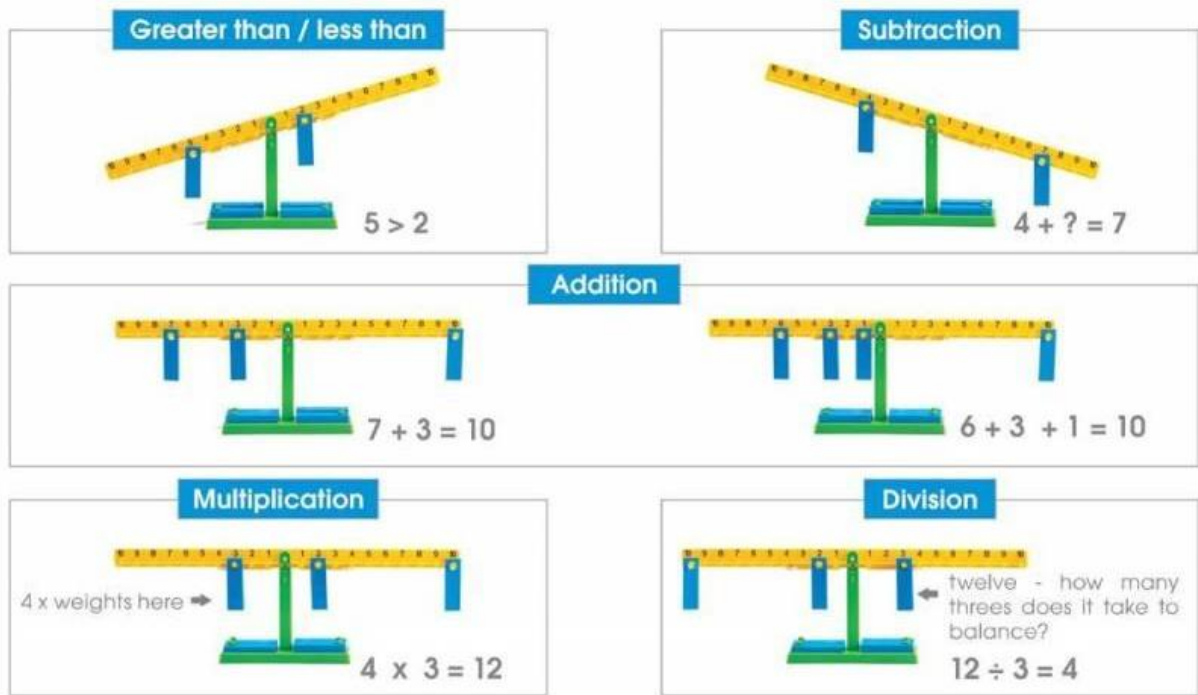
- Επαγωγική Λογική
- Αναλογικότητα
- Η ιδέα του «μοναδιαίου (ειδικού) βάρους» και η εξαγωγή των αναλογιών των αντικειμένων με βάση τη σύγκριση, χωρίς τη χρήση εργαλείων μέτρησης, παρά μόνο της ζυγαριάς
- Υπολογισμός του βάρους ορισμένων αντικειμένων.
- Η ισορροπία ως έννοια της ισότητας
- Νοητική αριθμητική: γινόμενα και προσθέσεις
- Πρακτική στη μεθοδολογία δοκιμής και λάθους

## Παρατηρήσεις

Η ζυγαριά μπορεί να χρειάζεται ρύθμιση. Αυτό μπορεί εύκολα να γίνει με μονωτική ταινία μέχρι να ισορροπήσει η δοκός χωρίς βάρη.

Ορισμένες μαθηματικές έννοιες όπως οι ισότητες και οι ανισότητες οπτικοποιούνται εύκολα με τη χρήση μιας ζυγαριάς. Ένα οπτικό παράδειγμα παρακάτω:





## Για τρισδιάστατους εκτυπωτές (εάν υπάρχουν)

Το DIY καθώς και όλα τα τρισδιάστατα εκτυπώσιμα αρχεία μπορείτε να τα βρείτε στη διεύθυνση:

<https://drive.google.com/drive/folders/1F8JySKT56nZZd0oEDAV501hNzM6W4pQx?usp=sharing>