

# Το Παράδοξο του Χαρτονομίσματος

## Υλικά

Δύο ταμπλό DIN A3 με ένα λευκό ορθογώνιο στο κάθε ένα.

Τα κομμάτια των χαρτονομισμάτων είναι από PVC ή από ξύλο για να τοποθετηθούν στο ορθογώνιο. Θα υπάρξουν δύο παράδοξα.

Για το πρώτο, για τη μία πλευρά θα πρέπει να εμφανιστεί το χαρτονόμισμα των 100€, αλλά για την άλλη το χαρτονόμισμα των 50€.

Για το δεύτερο χαρτονόμισμα, στη μία πλευρά θα πρέπει να εμφανιστεί το χαρτονόμισμα των 20€ και στην άλλη το χαρτονόμισμα των 50€.

## Σύντομη Περιγραφή

Με τα κομμάτια του εκθέματος πρέπει να συναρμολογήσετε το χαρτονόμισμα των 100€ (5 κομμάτια), αλλά αν αναποδογυρίσετε όλα τα κομμάτια, τότε μπορείτε να συναρμολογήσετε το χαρτονόμισμα των 50€... αλλά θα περισσεύει ένα κομμάτι!

Για το δεύτερο παράδοξο, θα συναρμολογήσετε το χαρτονόμισμα των 20€ (3 κομμάτια) και στη συνέχεια μπορείτε να αναποδογυρίσετε τα κομμάτια και να συναρμολογήσετε το χαρτονόμισμα των 50€... αλλά θα περισσεύει ένα κομμάτι!

Υπάρχει ένα παράδοξο και η ιδέα είναι να προσπαθήσετε να εξηγήσετε τι συμβαίνει εκεί.

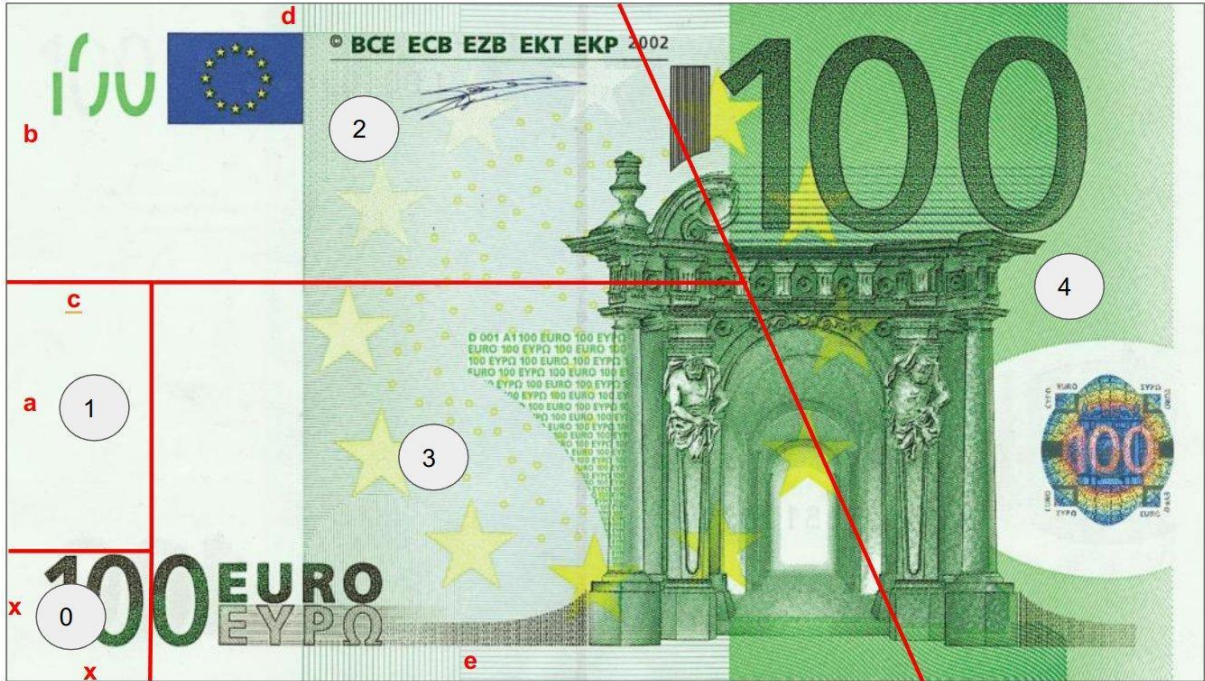
## Συναρμολόγηση

### Σχεδιασμός όλων των κομματιών

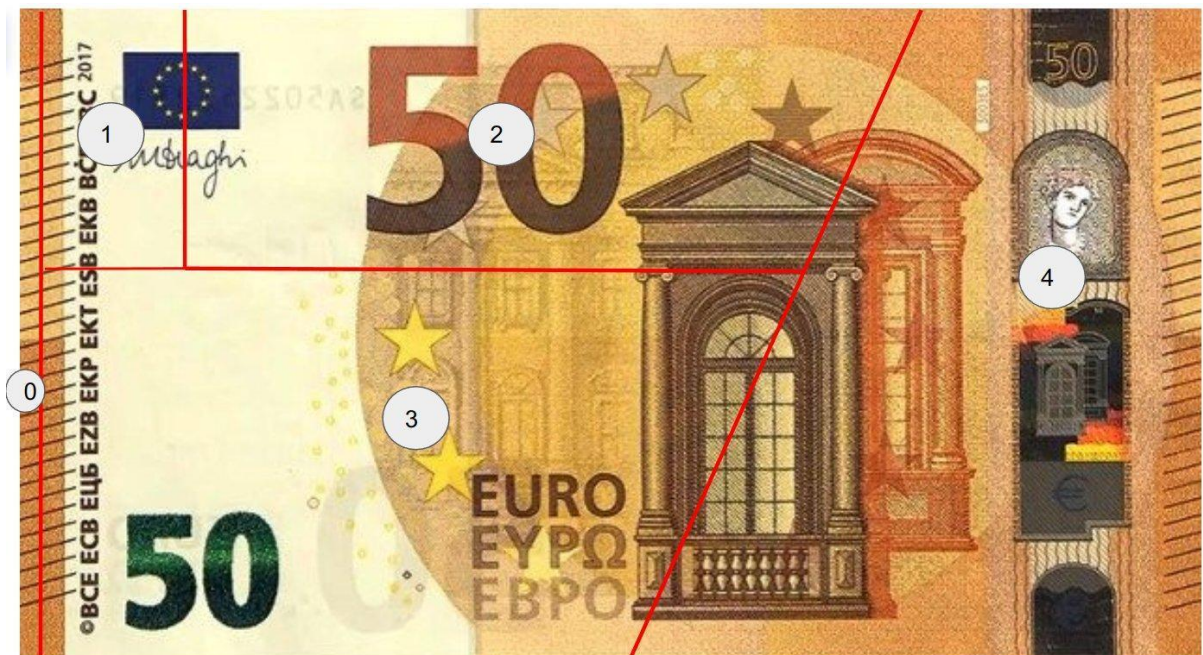
Τα κομμάτια παρουσιάζονται στις φωτογραφίες με τις διαστάσεις.

**ΠΡΩΤΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ:**

Μπροστινή όψη του χαρτονομίσματος:



Πίσω όψη του χαρτονομίσματος:



(Ούτε οι εικόνες των χαρτονομισμάτων ούτε οι διαστάσεις είναι στη σωστή κλίμακα, είναι μόνο για επεξηγηματικούς σκοπούς)

Πρέπει να πληρούνται δύο προϋποθέσεις όσον αφορά τις διαστάσεις των κομματιών:

$$\alpha = \beta$$

$$\gamma + \delta = \varepsilon$$

(οι υπόλοιπες διαστάσεις μπορούν να είναι οποιεσδήποτε)

Για παράδειγμα, για ένα χαρτονόμισμα με διαστάσεις:

15 εκ. x 8,5 εκ.

Θεωρείστε:

$$\alpha = 1,1 \text{ εκ.}$$

$$\beta = \gamma = 3,7 \text{ εκ.}$$

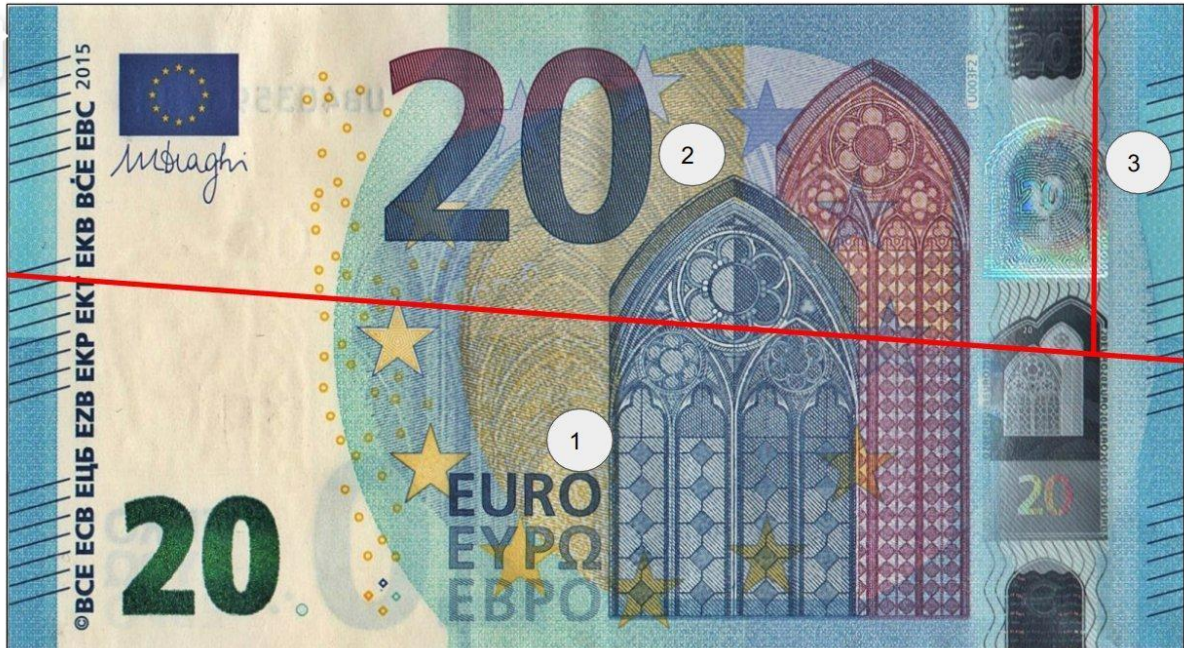
$$\delta = 7 \text{ εκ.}$$

$$\varepsilon = 8,1 \text{ εκ.}$$

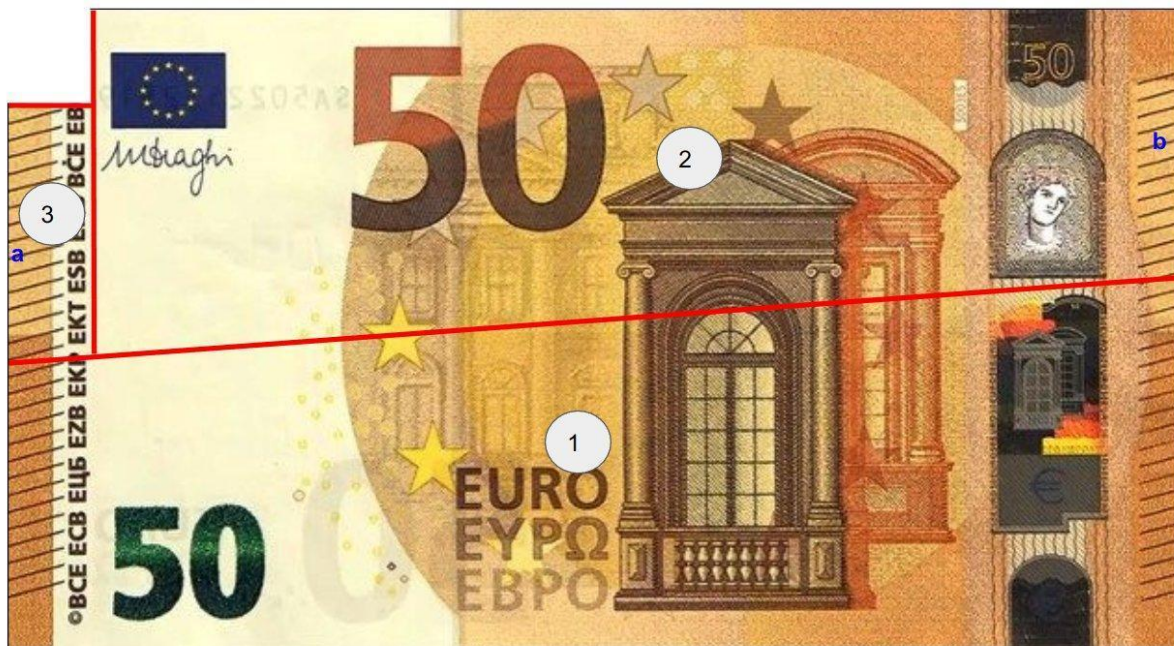
Το κομμάτι που εξαφανίζεται είναι ο αριθμός 0, οπότε στην εικόνα του χαρτονομίσματος των 50€ θα πρέπει να κόψετε ελάχιστα το αριστερό και το δεξί περιθώριο (ακριβώς την περιοχή που περισσεύει), ώστε η διαφορά να μην είναι αισθητή.

**ΔΕΥΤΕΡΟ ΠΑΡΑΔΟΞΟ:**

Μπροστινή όψη του χαρτονομίσματος:



Πίσω όψη του χαρτονομίσματος:



Υπάρχει ένα μικρό τετράγωνο στη γωνία το οποίο «εξαφανίστηκε».  
Είναι η ίδια περιοχή που είχε μεγεθυνθεί στο χαρτονόμισμα των 50€.  
Έτσι, το χαρτονόμισμα των 50€ είναι ελαφρώς μεγαλύτερο, αλλά η  
διαφορά δεν είναι αισθητή στο μάτι.

Μόνο μία προϋπόθεση πρέπει να πληρείται όσον αφορά τις διαστάσεις των  
κομματιών:

$$\alpha = \beta$$

(οι υπόλοιπες διαστάσεις μπορούν να είναι οποιεσδήποτε)

Για παράδειγμα, για ένα χαρτονόμισμα με διαστάσεις:

$$15 \text{ εκ.} \times 8,5 \text{ εκ.}$$

Θεωρείστε:

$$\alpha = \beta = 4,5 \text{ εκ.}$$

$$\gamma = 1 \text{ εκ.}$$

### Συναρμολόγηση

**ΣΥΜΒΟΥΛΗ:** Είναι εξαιρετικά σημαντική η ακρίβεια και η μεγάλη προσοχή στη  
λήψη των μετρήσεων και στην εκτέλεση του κοψίματος. Τα δύο παράδοξα  
συναρμολογούνται με τον ίδιο τρόπο.

Μπορείτε να φτιάξετε τα χαρτονομίσματα από PVC, εκτυπώστε τα 100€ για τη  
μία πλευρά με τις γραμμές που πρέπει να κοπούν. Εκτυπώστε τα 50€ σε άλλο  
χαρτί με τις γραμμές που πρόκειται να κοπούν. Κόψτε όλα τα κομμάτια και  
κολλήστε τα μεταξύ τους. Δύο κομμάτια με το ίδιο σχήμα πρέπει να κολληθούν  
μεταξύ τους. Θα μείνει ένα κομμάτι: το τετράγωνο.

## Το Ταμπλό (DINA3)

Τα ταμπλό είναι αρκετά απλα, αφού έχουν μόνο μια ερώτηση και ένα λευκό ορθογώνιο που θα έχει τις ίδιες διαστάσεις με τα χαρτονομίσματα.

Κείμενο (Ταμπλό 1): «Συνθέστε το χαρτονόμισμα των 100€ με αυτά τα κομμάτια. Στη συνέχεια, αναποδογυρίστε τα όλα και συνθέστε το χαρτονόμισμα των 50€.  
Τι συνέβη; Γιατί;»

Κείμενο (Ταμπλό 2): «Συνθέστε το χαρτονόμισμα των 20€ με αυτά τα κομμάτια. Στη συνέχεια, αναποδογυρίστε τα όλα και συνθέστε το χαρτονόμισμα των 50€.  
Τι συνέβη; Γιατί;»



**Το Παράδοξο του Χαρτονομίσματος**

Συνθέστε το χαρτονόμισμα των 100€ με αυτά τα κομμάτια. Στη συνέχεια, αναποδογυρίστε τα όλα και συνθέστε το χαρτονόμισμα των 50€.  
Τι συνέβη; Γιατί;

Συνθέστε το χαρτονόμισμα των 20€ με αυτά τα κομμάτια. Στη συνέχεια, αναποδογυρίστε τα όλα και συνθέστε το χαρτονόμισμα των 50€.  
Τι συνέβη; Γιατί;

Με τη συγχρηματοδότηση της Ευρωπαϊκής Ένωσης

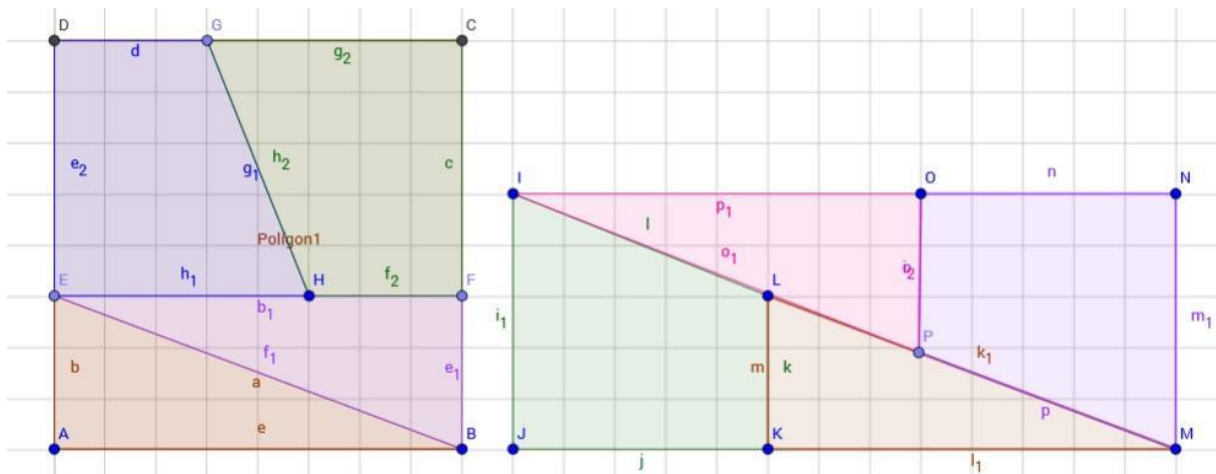
## Άλλες Επιλογές

Υπάρχουν και άλλες εκδοχές για το παράδοξο χρησιμοποιώντας άλλα θέματα όπως η σοκολάτα ή ένα τρικ με τραπουλόχαρτα.

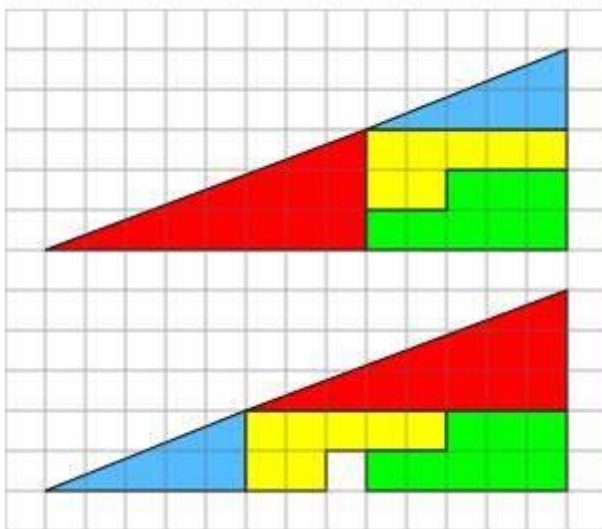
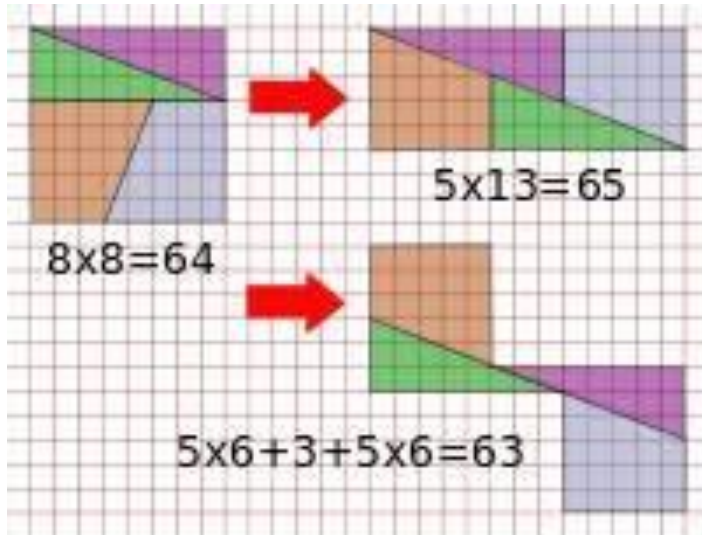
<https://www.youtube.com/watch?v=BBrtzaZQeso>



Μια άλλη επιλογή, που μπορεί να εφαρμοστεί στην τάξη, είναι η μετατροπή ενός τετραγώνου  $8 \times 8$  σε ορθογώνιο  $13 \times 5$ , έτσι ώστε  $64 \neq 65$ . Μπορεί εύκολα να αποτυπωθεί σε ένα τετράγωνο χαρτί που πρέπει να κοπεί και να επανασυναρμολογηθεί. Περιλαμβάνει τους αριθμούς Fibonacci.



Ένα άλλο παρόμοιο παράδοξο είναι αυτό του Paul Curry:



Και πάλι, χρησιμοποιούνται οι αριθμοί Fibonacci (1,2,3,5,8,13)



## Επεξήγηση

Το εισαγωγικό κείμενο εισάγει την ιδέα του παράδοξου στα μαθηματικά. Πώς είναι δυνατόν να φτιάξουμε το ίδιο σχήμα με διαφορετικά εμβαδά;

Για το πρώτο παράδοξο, φυσικά, τα δύο χαρτονομίσματα δεν έχουν ακριβώς το ίδιο εμβαδόν. Το χαρτονόμισμα των 100€ είναι λίγο μεγαλύτερο από το χαρτονόμισμα των 50€, αλλά το εμβαδόν του τετραγώνου που αφαιρείται, είναι κοινό για όλα τα χαρτονομίσματα των 50€ για να είναι παρόμοιο με το χαρτονόμισμα των 100€, ώστε το μάτι να μην μπορεί να παρατηρήσει τη διαφορά.

Το ίδιο συμβαίνει και με το παράδοξο 20€ - 50€, αλλά εδώ το 50€ είναι λίγο μεγαλύτερο. Το εμβαδόν του εξαφανισμένου τετραγώνου θεωρείται το άνω και το κάτω μέρος του χαρτονομίσματος των 20€.

Η βασική ιδέα είναι να προκαλέσουμε ένα ξάφνιασμα που θα αποτελέσει αφορμή για συζήτηση μεταξύ των επισκεπτών σχετικά με ορισμένες γεωμετρικές έννοιες: εμβαδά, σχήματα, ιδιότητες κλπ.

## Δεξιότητες

Οι γεωμετρικές έννοιες μπορούν να συμπεριληφθούν στη συζήτηση για να εξηγήσουν καταστάσεις που φαίνονται αδύνατες, όπως το εμβαδόν ορισμένων τετράπλευρων και τα μαθηματικά παράδοξα.

Η επίλυση των δοκιμασιών απαιτεί επίσης κάποιες βασικές έννοιες όπως η περιστροφή, η μετακίνηση και η συμμετρία.

## Παρατηρήσεις

Όπως ειπώθηκε παραπάνω, είναι εξαιρετικά σημαντική η ακρίβεια και η μεγάλη προσοχή στη λήψη των μετρήσεων και στην εκτέλεση του κοψίματος.

## Για τρισδιάστατους εκτυπωτές (εάν εφαρμόζεται)

Η κατασκευή για τρισδιάστατους εκτυπωτές είναι σχεδόν η ίδια με την παραπάνω εκδοχή. Εφόσον δεν μπορείτε να εκτυπώσετε απευθείας με μελάνι, τότε μπορείτε να αποτυπώσετε (με μελάνι) τις εικόνες των χαρτονομισμάτων σε ένα αυτοκόλλητο χαρτί και να το προσθέσετε στη συνέχεια. Αν και δεν είναι απαραίτητο, αφού θα έχετε ένα γεωμετρικά πειραγμένο παιχνίδι κατά το οποίο θα μπορείτε να εξαφανίσετε ένα τετράγωνο!

Μπορείτε επίσης να προσθέσετε κάποιες υφές στα κομμάτια προς διευκόλυνση των ατόμων με ειδικές μαθησιακές διαταραχές.